

Klasszikus fizika laboratórium

Jegyzőkönyv

Füzi Ádám

kedd délutáni csoport

3. Hangfrekvenciás mechanikai rezgések vizsgálata

Mérés dátuma:
2024. 09. 24.

Leadás dátuma:
.....

A mérés célja

A különböző szilárd testek rugalmas és rugalmatlan tulajdonságait mérhetjük statikus és dinamikus módszerekkel is. Jelenlegi kísérleteinkben dinamikus módszerek alkalmazásával próbáljuk meghatározni két különböző anyagú test tulajdonságait. Dinamikus módszereknél a vizsgálandó anyagból készült mintákat transzverzális, longitudinális vagy torziós rezgésbe hozzuk, majd mérjük a rezgés frekvenciáját, amplitúdóját esetleg fázisszögét. A kapott adatainkból következtethetünk az anyagunk rugalmassági tulajdonságaira. A mostani mérés esetén két téglalap keresztmetszetű, rúd alakú minta transzverzális rezgéseit vizsgáltuk. A mért adataink segítségével kifejezzük a mintáink Young-modulusát, megvizsgáljuk a rezonanciagörbét kétfajta módon, majd vizsgáljuk az alapharmonikus frekvenciájának a rezgőhossztól való függését (ez utóbbira sajnos nem maradt elég idő a labor végén).

A mérés elve:

A két különböző anyagú és tulajdonságú testet kényszerrezgésre készítjük úgy, hogy az egyik oldalát mereven lerögzítjük, a másikat pedig szabadon hagyjuk. A rudak transzverzális sajátrezgései végtelen sok, diszkrét sajátmódussal jellemezhetők, azonban megfelelő frekvencia mellett ezek a sajátmódusok külön-külön is gerjeszthetők. A z tengely irányában rezgetett rúd sajátrezgéseit leíró függvények felbonthatók hely- és időfüggő függvények szorzataira. Számunkra innen a helyfüggő rész megoldása az érdekes. A helyfüggő rész megoldása a következőképpen írható le:

$$\cosh(\lambda l) \cdot \cos(\lambda l) + 1 = 0.$$

A kifejezésben szerepel l , a minta hossza, ami ugyebár állandó és ezen kívül a λ mintaállandó, ami magában hordozza az ω_0 sajátfrekvenciát is. Ebből az egyenletből továbbjuthatunk a számunkra fontos alakra:

$$\lambda_i \cdot l = k_i \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Számunkra innen az első négy érték az érdekes, melyek helyre:

- $k_0 = 1.87510$
- $k_1 = 4.69409$
- $k_2 = 7.86476$
- $k_3 = 10.9955$

Fontos még, hogy az időfüggő rész segítségével kifejezhető a rezgés i . amplitúdójának frekvenciafüggése:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}.$$

Az amplitúdót három paraméterrel jellemezzük. Egyrészt az A_{0i} , amely a gerjesztés nagyságától függő amplitúdó-állandó, emellett szerepet játszik a κ_i , amely a csillapítási tényező és végül ω_{0i} , amely az egyes rezgési módusokhoz tartozó saját-körfrekvencia értéke.

A számunkra fontos sajátfrekvenciák kifejezhetőek a következő egyenlettel:

$$\omega_{0i} = \frac{k_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot q}}$$

,ahol ω_i az egyes rezgési módusokhoz tartozó sajátfrekvencia, l a minta hossza, E a Young-modulus, q a minta keresztmetszetének felülete, k_i egy szorzótényező, melyeket fentebb már levezettünk, I pedig a másodrendű felületi nyomaték, amit egy a alaphosszú és b magasságú téglalest esetén egy

$$I_{ab} = \frac{ab^3}{12}$$

képlettel számolhatjuk.

Mivel a mérés során a frekvenciákat és a test bizonyos geometriai adottságait mérjük, a fenti képletek használatával kiszámolhatjuk a minak Young-modulusait.

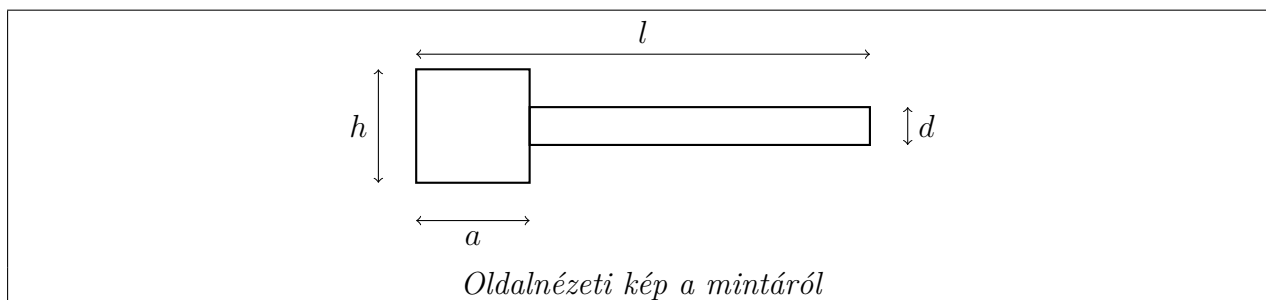
A rezgési amplitúdó függ a gerjesztető kényszertől, annak volumenétől és frekvenciájától is. A rezonanciagörbe mérésénél, a minta amplitúdó függését mérjük a gerjesztő erő frekvenciájának függvényében, mikor a gerjesztő frekvencia az egyik sajátfrekvenciának a közelébe kerül. A normált amplitúdó görbéből könnyen leolvasható a rezonanciagörbe félértékszélessége ($\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$), amely annak a két frekvenciának a különbsége, ahol $A_N(\nu) \left(= \frac{A_i(\omega)}{A_{i,max}} \right)$ felveszi az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ értéket. Kis csillapítás esetén felírható, hogy:

$$\Delta\nu = \frac{\kappa}{\pi}.$$

Mérés - B jelű rúd:

A Young-modulus kiszámítása:

A B jelű mintát a mintatartóba helyezzük, majd a gerjesztő mágnes körülbelül 1mm távolságot tartva a minta szabad vége alá toljuk. A rezgésérzékelő detektort 1cm-re a befogott végtől helyezzük, hogy az biztosan ne egy csomóponton legyen. A mágneses rendszert szinuszos jelre kötjük. Ettől rúd rezgésbe jön, amit a "pick-up" feszültségként jelez, a rezgés amplitúdójával arányosan. A rezonanciafrekvencián ez a feszültség nagymértékben megnő és lokális maximuma lesz. A minta mérése során elsőként a geometriai adatokat és a minta tömegét mérjük meg. Ezeknek a hibáit a tankönyv "Abszolút hiba" részében leírtak alapján számoltam, hiszen nem volt elegendő számú mérési adat az empirikus szóráshoz. Ezekből térfogatot, sűrűséget és másodrendű nyomatékot számolunk, majd ezeknek a hibáit már relatív hibaként adjuk meg. Ezek után még megadjuk a különböző mért és számolt rezonanciafrekvenciákat, majd a mért értékekkel dolgozunk.



A minta geometriai adatai [mm]								
A teljes minta hossza	l	100.02	100.03	-	-	-	$\bar{l}$	100.025 ± 0.005
A vastagabb rész hossza	a	20.13	20.1	20.18	20.19	20.1	$\bar{a}$	20.14 ± 0.036
A teljes minta szélessége	b	15.1	15.05	15.04	15.08	15.11	$\bar{b}$	15.076 ± 0.025
A rezgő rész vastagsága	d	2.04	2.04	2.03	2.03	2.04	$\bar{d}$	2.036 ± 0.005
A vastag rész magassága	h	10.01	10.07	10.03	10.04	10.05	$\bar{h}$	10.04 ± 0.016

A minta egyéb adatai		
A minta tömege	m	$14.6310 \pm 0.0001 \text{ g}$
A teljes minta térfogata	V	$5.5005 \pm 0.0374 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
A minta sűrűsége	ρ	$2660.18 \pm 18.09 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
A hajlítási nyomaték	I	$10.603 \pm 0.096 \text{ mm}^4$

A minta rezonanciafrekvenciái					
i	$\left(\frac{k_i}{k_0}\right)^2$	$\nu_m(Hz)$	$\nu_{sz}(Hz)$	$\nu_{fél\ m}(Hz)$	$\delta h(\%)$
0	1	255.44	-	127.72	-
1	6.26692	1604.05	1600.821	802.21	0.2
2	17.60436	4512.06	4493.772	2256.26	0.41
3	34.38596	8829.498	8783.549	4404.01	0.52

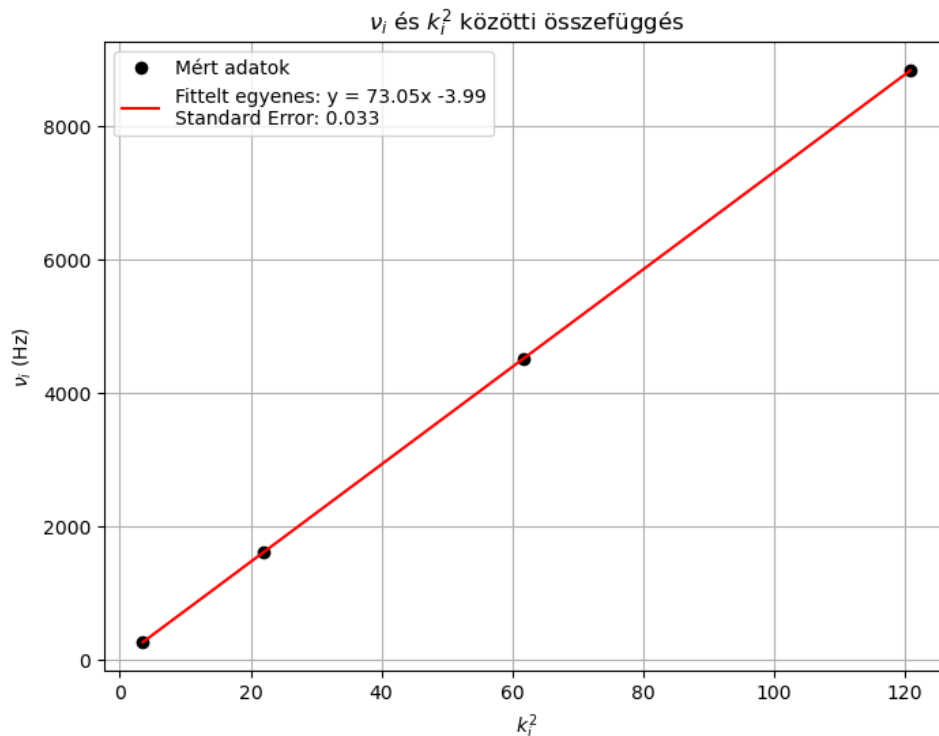
Különböző betűket használtam, hogy könnyebben átláthatóak legyenek a minta dimenziói. Ezeknek a mennyiségeknek a tudatában már megadhatjuk a Young-modulust a fentebb olvasható képlet kisebb átrendezésével:

$$E = 4\pi\nu_{0i}^2 \frac{l^4 \rho q}{k_i^4 I}$$

A módusokhoz tartozó Young-modulusok:

i	E_i (GPa)
0	65.35
1	65.61
2	65.88
3	66.04
$\bar{E}$	65.72

Ha hibát akarunk számolni, akkor meg kell adnunk a (ν_i/k_i^2) adatokra illeszthető egyenes meredekségét és annak a hibáját. Ezt a meredekséget elnevezzük m -nek annak hibáját, pedig Δm -nek.



m értéke az illesztés alapján: $m = 73.05 \text{ Hz}$, míg $\Delta m = 0.033 \text{ Hz}$. Innentől már kiszámolhatjuk a Young modulushoz tartozó hibát a következőféleképpen:

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = 4 \cdot \left| \frac{\Delta s}{s} \right| + 2 \cdot \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| + \left| \frac{\Delta q}{q} \right| + \left| \frac{\Delta I}{I} \right|$$

Itt fontos, hogy az s az csak a rezgő rész hossza, aminek a hibáját egyenlőnek vettem az a hibájával. Így végül megkapjuk, hogy a Young-modulus értéke:

$$E = 65.72 \pm 1.489 \text{ GPa.}$$

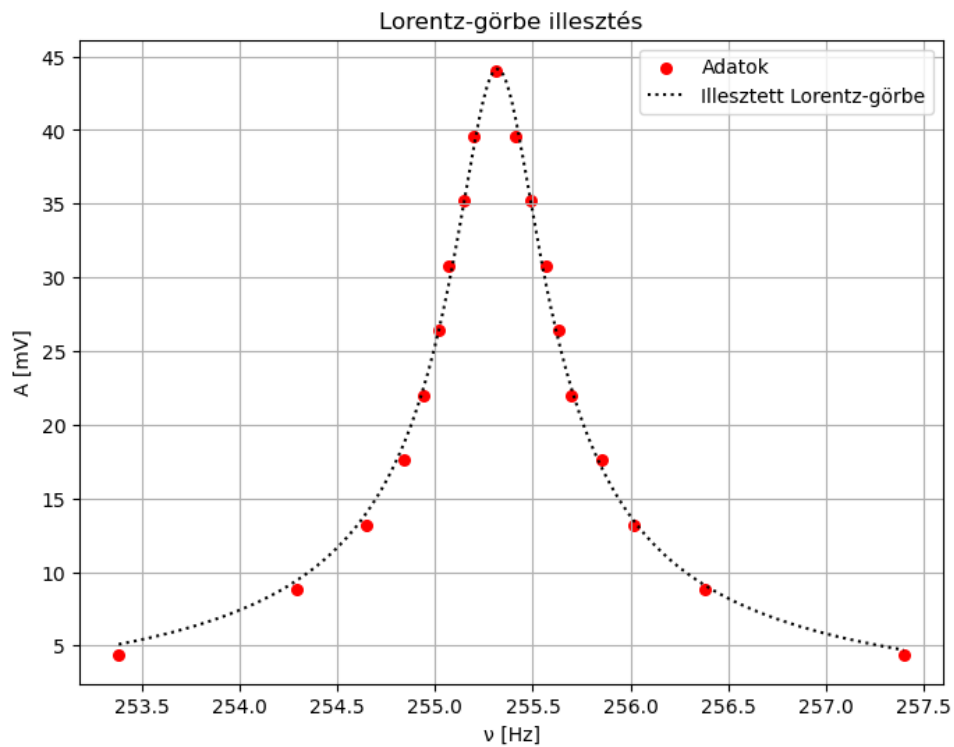
A rezonanciagörbe mérése:

Kimérjük az alapl módushoz tartozó maximum amplitúdót és az ahhoz tartozó frekvenciát (kicsit eltér a frekvencia mert kis idő eltelt a két mérés között). Ezek után az adatokra egy Lorentz-görbét illesztünk melynek egyenlete:

$$A_i(\nu) = \frac{A_{i0}}{\sqrt{(\nu_{i0}^2 - \nu^2)^2 + 4\kappa^2\nu^2}}$$

Ezek után meghatározzuk az ehhez tartozó ν_0 maximum frekvenciát és az ahhoz tartozó $\Delta\nu_0$ hibát (ezeket a python programom alapján adtam meg). Az A amplitúdó 100%-os értéke 44mV volt a mérés során, ehhez képest mértem a többi értéket is. A táblázatban %-os formában vannak megjelenítve a további A -k.

A (mV)	ν (Hz)	
100%	255.31	
90%	255.2	255.41
80%	255.15	255.49
70%	255.07	255.57
60%	255.02	255.63
50%	254.94	255.7
40%	254.84	255.85
30%	254.65	256.02
20%	254.29	256.38
10%	253.38	257.4



A python alapján kapjuk az illesztést követő alábbi értékeket:

$$\nu_0 = 255.3193 \text{ Hz}$$

$$\Delta\nu_0 = 0.0038 \text{ Hz}$$

$$A_{\max} = 44.1411 \text{ mV}$$

Az $A_{\max}$ a ν_0 -hoz tartozó amplitúdó. Ezeknek az értékeknek a felhasználásával meghatározhatjuk a félértékszélességet, ami alapján kiszámolhatjuk a csillapítási tényezőt és a belső súrlódást. $\Delta\nu$ annak a két frekvenciának a különbsége, ahol a rezonanciagörbe felveszi az $A_{\max}/\sqrt{2}$ értéket.

Az $A_{\max}/\sqrt{2}$ -hoz tartozó $\nu = 255.5431$ Hz. Ebből adódik a $\Delta\nu = 0.2238$ Hz.
A κ csillapítási tényező értéke számolható:

$$\kappa = \pi \cdot \Delta\nu = 0.703 \text{ Hz}$$

A Q^{-1} belső súrlódást, pedig a következőképpen kaphatjuk meg:

$$Q^{-1} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 8.765 \cdot 10^{-4}$$