

1. fejezet

Fényelhajlási jelenségek vizsgálata (Havancsák Károly, Groma István)

1.1. Bevezetés

A fény hullámtermészetének vizsgálatára több mérést is végzünk a laboratóriumban. A jelen mérések célja néhány egyszerű esetben (elhajlás résen, kettős résen, hajszálon, optikai rácson) meghatározni az interferencia során kialakuló intenzitás eloszlást.

Az elhajlási jelenségek értelmezéséhez a Huygens-Fresnel elvből indulhatunk ki, amely szerint egy adott pontban észlelt intenzitás egy valamilyen adott zárt felületen kiinduló megfelelő amplitúdójú és fázisú gömbhullámok interferenciája következtében alakul ki. Érdeemes megemlíteni, hogy azért hívjuk ezt „elvnek” mert az elektrodinamika Maxwell egyenleteiből ez az elv közvetlenül levezethető, a részletekkel azonban itt nem foglalkozunk.

A gyakorlat megvalósítása során fényforrásként lézert használunk, amely monokromatikus, párhuzamos és koherens nyalábot ad, így matematikailag is jól kezelhető, egyszerűen értelmezhető jelenségeket vizsgálhatunk. Az intenzitás eloszlását alkalmas eszközzel megmérve az elmélettel jó egyezést kapunk, ugyanakkor a rés szélességét és a szál vastagságát is meghatározhatjuk.

1.2. Elméleti összefoglaló

Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy egyszerű kísérleti elrendezést. Világítsunk meg egy lézerrel a z tengely origójában elhelyezkedő a z tengelyre merőleges sík lemezt. Ennek áteresztő képességét adja meg az ún. $T(x, y)$ átviteli függvény. Ez elvben lehet komplex szám, aminek fázisa megadja a fény áthaladása közben esetleg fellépő fázistolást. Felteesszük továbbá, hogy a lézerfény merőlegesen esik a lemezre, ezért a bejövő fény fázisa állandó a lemezen. (Az eredmények könnyen általánosíthatók nem merőleges beesésre,

de ezzel itt nem foglalkozunk.) Egy origóból kiinduló gömbhullám által keltett elektromos ill. mágneses térerősség valamelyik komponense Φ_g az $\underline{r}$ pontba

$$\Phi_g(\underline{r}) = \Phi_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (1.1)$$

alakban adható meg, ahol i az imaginárius egység, Φ_0 a megfelelő komponens arányossági tényezője és $k = 2\pi/\lambda$, ahol λ a fény hullámhossza. Megjegyezzük, hogy a számolásokban komplex formalizmust használunk, mivel az azonos frekvenciájú de különböző amplitúdójú és fázisú rezgések összetételénél ez egy igen hatékony és könnyen kivitelezhető módszer.

A Huygens-Fresnel elv szerint a lemezen áthaladó fény intenzitását az egyes pontokból kiinduló gömbhullámok interferenciája adja. Ezért az $\underline{r}$ pontban a megfelelő térerősség komponens

$$\Phi(\underline{r}) = \Phi_0 \iint T(x', y') \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} dx' dy', \quad (1.2)$$

ahol $\underline{r}' = (x', y')$. (Itt Φ_0 azért állandó mert feltettük, hogy a bejövő nyaláb egy síkhullám és merőleges a tárgyra.) Mivel általában az ernyő távolsága sokkal nagyobb mint a síklemezen megvilágított „áteresztő” terület mérete, a fenti képletben a nevezőben elhagyhatjuk $\underline{r}'$ -t $\underline{r}$ mellett, így jó közelítéssel

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{\Phi_0}{4\pi r} \iint T(x', y') e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|} dx' dy'. \quad (1.3)$$

Tekintettel arra, hogy az elektromágneses hullámban vákuumban az elektromos és mágneses térerősség merőleges egymásra és nagyságuk aránya állandó az intenzitás megadó Poynting vektor nagysága arányos Φ abszolút érték négyzetével, $I(r) \propto |\Phi(r)|^2$.

Mivel a detektálásra használt ernyő távolsága sokkal nagyobb mint az elhajlási kép „kiterjedése”, r az ernyőn állandónak tekinthető és egyenlő az ernyő és a megvilágított lemez L távolságával. Ezért bevezetve az

$$A(k, \underline{r}) = A_0 \iint T(x', y') e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|} dx' dy' \quad (1.4)$$

un. szórási amplitúdót adódik, hogy $I(\underline{r}) \propto |A(k, \underline{r})|^2$. Itt A_0 egy tetszőleges állandó amelyet a beeső intenzitás határoz meg. A további megfontolások alapja a (1.4) kifejezés.

1.2.1. Fraunhofer-féle elhajlás

A gyakorlati esetek döntő többségében (rés, kettős rés, rács) az (1.4) kifejezésben szereplő integrálást csak egy L -hez képest kis méretű területre kell elvégezni. (Kivételt jelent a

féltér, azzal később külön foglalkozunk.) Ezért használhatjuk az alábbi közelítést

$$|\underline{r} - \underline{r}'| \approx |\underline{r}| + (\text{grad}|\underline{r}|)\underline{r}' = |\underline{r}| + \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\underline{r}' = |\underline{r}| + \underline{n}\underline{r}', \quad (1.5)$$

ahol $\underline{n}$ egy $\underline{r}$ irányú egységvektor. Ezt behelyettesítve (1.4)-be kapjuk, hogy

$$A(\underline{k}, \underline{r}) = A_0 e^{ik|\underline{r}|} \int \int T(x', y') e^{i\underline{k}\underline{r}'} dx' dy' \quad (1.6)$$

ahol bevezettük a $\underline{k} = k\underline{n}$ jelölést. Mivel az integrálás előtt egy egységnyi abszolút értékű komplex szám áll, ez nem ad járulékot az intenzitáshoz, ezért a továbbiakban elhagyhatjuk. Így lényegében a szórási amplitúdó csak a $\underline{k}$ „kimenő” hullámszám vektor függvénye:

$$A(\underline{k}) = A_0 \int \int T(x', y') e^{i\underline{k}\underline{r}'} dx' dy'. \quad (1.7)$$

Az eredmény úgy fogható fel mintha ebben az ún. Fraunhofer-féle elrendezésben (az ernyő messze van a tárgytól) a szórt intenzitás a megvilágított lemez pontjaiból kiinduló síkhullámok szuperpozíciójából állna elő. Matematikai szempontból pedig az eredmény azt mutatja, hogy az elhajlási kép a $T(x', y')$ átviteli függvény Fourier transzformáltja.

Érdemes megemlíteni, hogy ha a tárgy után egy lencsét helyezünk el akkor az az adott $\underline{k}$ irányba kiinduló síkhullámot a fókuszsíkjában gyűjti össze. Ezért egy lencse fókuszsíkjában a tárgyról kapott Fraunhofer-féle elhajlási kép jelenik meg. Ez a felismerés az Abbe féle leképezés elmélet alapja, amely azért fontos mert megmutatja az egyszerű geometriai optika diffrakció következtében fellépő határait.

Továbbá fontos megjegyezni, hogy az elhajlási jelenségek nem korlátozódnak a fényre. Az a tény, hogy egy objektumon szóródott hullámtermészetű sugárzás intenzitáseloszlásának elemzésével az objektum geometriai paraméterei meghatározhatók, igen nagy jelentőségű, mivel ennek alapján például megkaphatók a kristályos anyagok szerkezetének paraméterei. Ehhez olyan sugárzást kell használni, amelyek hullámhossza az atomi méretek nagyságrendjébe esik. Ez lehet röntgensugárzás, elektron- vagy neutronnyaláb.

1.2.2. Elhajlás vonalszerű akadályon

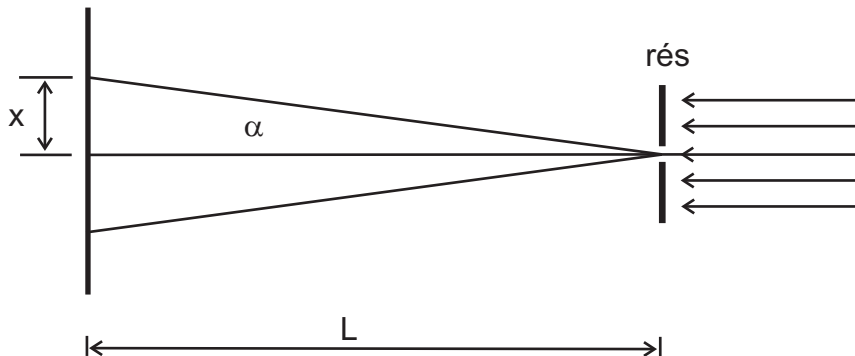
A mérésben használt elrendezések esetében $T(x', y')$ nem függ y' -től (hosszú rés, hosszú kettős rés, hosszú rács). Ekkor (1.7)-ban az y' szerinti integrálást egyszerűen el tudjuk végezni. Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_y y'} dy' = \delta(k_y) \quad (1.8)$$

látjuk, hogy ilyenkor szórást csak a $k_y = 0$ hullámszám vektor esetén kapunk. Ez azt jelenti, hogy a kimenő hullámszám mindig merőleges az y irányra. Ezért a szórási amplitúdó valójában érdemben csak a k_x -től függ:

$$A(k_x) = A_0 \int T(x') e^{ik_x x'} dx'. \quad (1.9)$$

(A triviális $\delta(k_y)$ függést nem jelöljük.) Ha a megfigyelés irányának szögét a z tengelyhez



1.1. ábra. Fényelhajlás résen

képest α -val jelöljük (lásd 1.1 ábra), nyilván adódik, hogy

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha. \quad (1.10)$$

1.2.3. Fraunhofer-féle fényelhajlás egyetlen résen

Egy a szélességű hosszú keskeny résen áthaladó, párhuzamos és a rés síkjára merőleges fénynyaláb esetében (lásd az 1.1. ábra) a $T(x)$ függvény a $(-a/2, a/2)$ intervallumban $T(x) = 1$, máshol pedig $T(x) = 0$. Ezért az 1.9 egyenlet alapján a szórási amplitúdó

$$A(k_x) = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik_x x'} dx' = \frac{A_0}{ik_x} (e^{ik_x a/2} - e^{-ik_x a/2}) = \frac{2A_0}{k_x} \sin(k_x a/2). \quad (1.11)$$

Felhasználva az 1.10 kifejezést az intenzitás $I(\alpha)$ eloszlását a szög függvényében az

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2}, \text{ ahol } \varepsilon = \pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha \quad (1.12)$$

egyenlet adja meg, ahol α az eltérülés szöge, I_0 az $\alpha = 0$ szögnél mérhető főmaximum intenzitása.

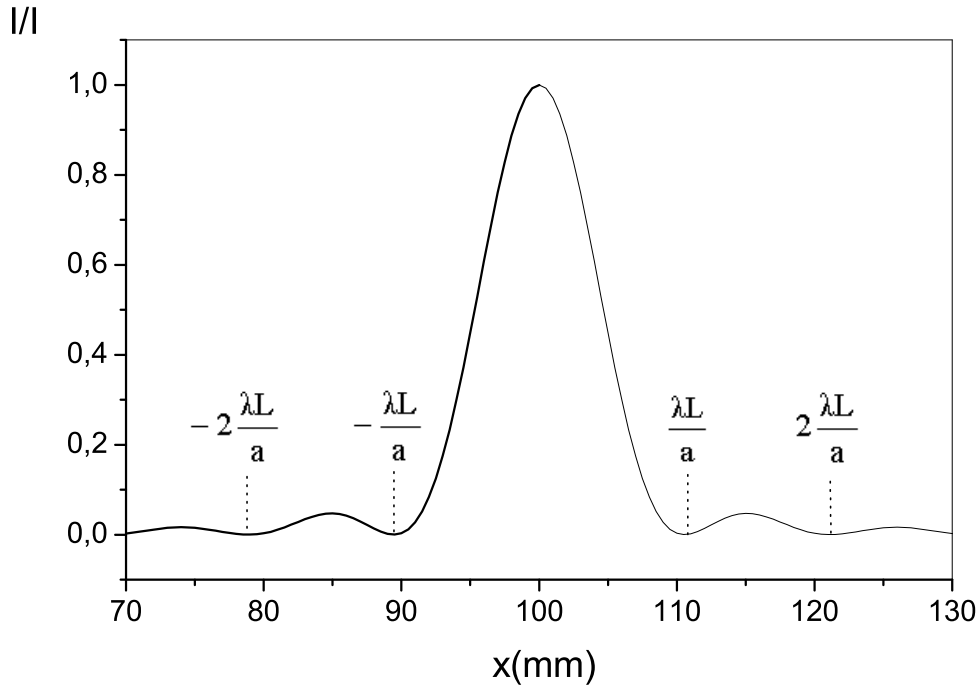
Az 1.12 összefüggés alapján az intenzitás minimum helyeit a következő egyenlet adja meg:

$$\sin \alpha_n = n \frac{\lambda}{a}; \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.13)$$

Ha a fényt egy, a rés méretéhez képest távoli ernyőn fogjuk fel, akkor az α szög helyett az ernyőn mért távolságot használhatjuk változóként. Mivel a szög kicsi, jó közelítéssel

írhatjuk, hogy $\sin \alpha \approx \tan \alpha = x/L$, ahol L a rés és a felfogó ernyő távolsága, x a főmaximum középpontjától mért távolság az ernyőn, ahogy azt az 1.1 ábra mutatja. Az ernyőn mért távolsággal kifejezve a minimumhelyeket:

$$x_n = n \frac{\lambda L}{a}; \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.14)$$



1.2. ábra. A rés elhajlási képe

A normált intenzitásgörbe alakját az ernyőn mért távolság függvényében az 1.2. ábra mutatja. A lecsengő függvény nem periodikus, ezért az intenzitás maximumok helyét általában $\lambda L/a$ irracionális többszörösei adják. Minél keskenyebb a rés, annál távolabb esnek egymástól a minimumok és maximumok, és annál nagyobb a középső csúcs félérték-szélessége.

A résszélességet meghatározhatjuk úgy, hogy a minimumok x_n helyeit lemérjük, és ábrázoljuk n függvényében. Az (1.14) kifejezés alapján a pontok olyan egyenesre illeszkednek, amelynek meredeksége: $m = \lambda L/a$. Innen a rés szélessége:

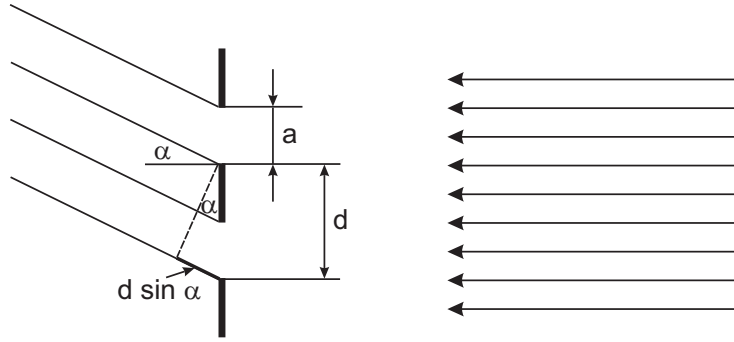
$$a = \frac{\lambda L}{m}. \quad (1.15)$$

1.2.4. Fraunhofer-féle elhajlás vékony szálon

Itt érdemes észrevenni, hogyha veszünk két $T_1(x, y)$ és $T_2(x, y)$ átviteli függvényt úgy, hogy azok egymás „komplementerei”, azaz $T_1(x, y) + T_2(x, y) = 0$ akkor a kapott két intenzitáseloszlások megegyeznek. Ezért egy vékony szál (pl. egy hajszál) elhajlási képe megegyezik az azonos méretű résen mért elhajlási képpel.

1.2.5. Fraunhofer-féle fényelhajlás kettős résen

Ha két a szélességű rést helyezünk egymástól d távolságra, ahogyan azt az 1.3. ábra mutatja, akkor a réseken átjutó fénynyalábok egymással is interferálnak, és a rés elhajlási képén további interferenciacsíkok jelennek meg.



1.3. ábra. Fényelhajlás kettős résen

Ilyenkor az 1.9 egyenlet alapján a szórási amplitúdó

$$A(k_x) = A_0 \left[\int_{-a/2-d/2}^{a/2-d/2} e^{ik_x x'} dx' + \int_{-a/2+d/2}^{a/2+d/2} e^{ik_x x'} dx' \right]. \quad (1.16)$$

Mindkét tagban egy egyszerű változó cserével kapjuk, hogy

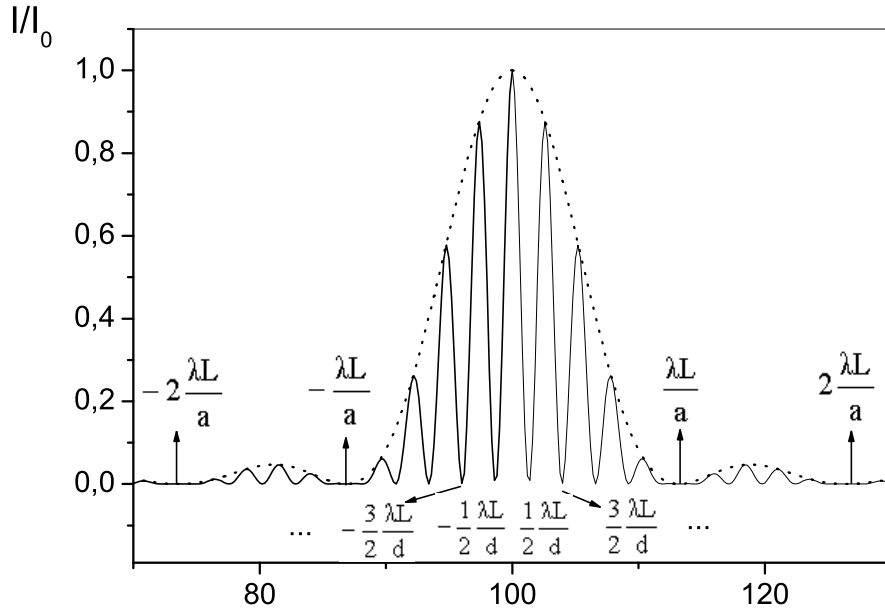
$$A(k_x) = A_1(k_x) (e^{-ik_x d/2} + e^{ik_x d/2}) = 2A_1(k_x) \cos(k_x d/2), \quad (1.17)$$

ahol $A_1(k_x)$ az 1 rés esetén kapott szórási amplitúdó. Ennek megfelelően az intenzitáseloszlást az

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha \right)^2} \cos^2 \left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha \right) \quad (1.18)$$

egyenlet írja le, melynek grafikonja az 1.4. ábrán látható, a $d = 4a$ esetre. A jobb oldal két szorzótényezőre bontható, amelyből az első megegyezik az 1.12 egyenlet jobb oldalával, és az eloszlás burkoló görbéjét adja meg, amit az 1.4. ábrán szaggatott vonal

jelöl. Ez lenne az eloszlás akkor, ha csak az egyik rés lenne jelen. A szélsőértékeit *első osztályú* minimumoknak, illetve maximumoknak nevezzük. Az első osztályú minimumok helyét az (1.13) egyenlet adja meg, amelyből a rés szélessége az (1.14) kifejezés alapján meghatározható.



1.4. ábra. Kettős rés elhajlási képe ($d = 4a$)

A második tényező a két résen átjutott nyalábok közötti interferenciát írja le. Ez további, ún. *másodosztályú* minimumok és maximumok fellépéséhez vezet. A minimumok helyét a koszinuszfüggvény nullhelyei adják, vagyis a

$$\sin(\alpha_k) = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}; \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

egyenlet adja meg. Ha a szög helyett ismét bevezetjük az ernyőn mérhető távolságot, akkor az alábbi kifejezésre jutunk:

$$x_k = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda L}{d}; \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (1.19)$$

A másodosztályú minimum helyek ismeretében a d réstávolság értéke meghatározható. Ha k helyett a $k^* = k + 1/2$ függvényében írjuk fel az (1.19) összefüggést, akkor azt kapjuk, hogy

$$x_k = k^* \frac{\lambda L}{d}, \text{ ahol } k^* = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2} \dots \quad (1.20)$$

Felrajzolva az x_k értékeket a k^* függvényében a meredekségből d értéke meghatározható, az (1.15) kifejezéshez hasonló összefüggés alapján. A k^* értékeinek meghatározásakor azonban ügyelnünk kell arra, hogy egyes másodosztályú maximumok nem jól látszanak abban az esetben, ha egybeesnek valamelyik első osztályú minimummal.

1.2.6. Fraunhofer-féle elhajlás optikai rácson

Igen fontos speciális eset amikor a $T(x)$ függvény periodikus, azaz egy adott a értékre $T(x+a) = T(x)$. Függetlenül a $T(x)$ konkrét alakjától az ilyen rendszert optikai rácsnak hívjuk.

Ekkor az 1.9 szórási amplitúdó

$$A(k_x) = A_0 \sum_{n=0}^N \int_{na}^{(n+1)a} T(x') e^{ik_x x'} dx', \quad (1.21)$$

ahol N a megvilágított periódusok számát jelöli. Az integrálásban egy $x' \rightarrow x' + na$ változócserét alkalmazva ez a $T(x)$ periodikussága következtében átírható

$$A(k_x) = A_0 \left[\int_0^a T(x') e^{ik_x x'} dx' \right] \left[\sum_{n=0}^N e^{ik_x na} \right]. \quad (1.22)$$

A szorzat első tagja az „egy rácспериódus” szórási amplitúdója

$$A_{ind}(k_x) = A_0 \int_0^a T(x') e^{ik_x x'} dx'. \quad (1.23)$$

A második pedig egy $q = e^{ik_x a}$ kvóciensű geometriai sor összege:

$$f'(k_x) = \sum_{n=0}^N e^{ik_x na} = \frac{e^{ik_x Na} - 1}{e^{ik_x a} - 1} = \frac{e^{ik_x Na/2} e^{ik_x Na/2} - e^{-ik_x Na/2}}{e^{ik_x a/2} e^{ik_x a/2} - e^{-ik_x a/2}}. \quad (1.24)$$

A jobb oldalon a szorzat első tagja egységnyi abszolút értékű, így az az intenzitást nem befolyásolja, ezért azt a továbbiakban elhagyhatjuk. Az intenzitást meghatározó tag

$$f(k_x) = \frac{e^{ik_x Na/2} - e^{-ik_x Na/2}}{e^{ik_x a/2} - e^{-ik_x a/2}} = \frac{\sin(k_x Na/2)}{\sin(k_x a/2)}, \quad (1.25)$$

amelyet az

$$\epsilon = \frac{a}{\lambda} \sin \alpha \quad (1.26)$$

jelölés bevezetésével

$$f(\pi\epsilon) = \frac{\sin(\pi N\epsilon)}{\sin(\pi\epsilon)} \quad (1.27)$$

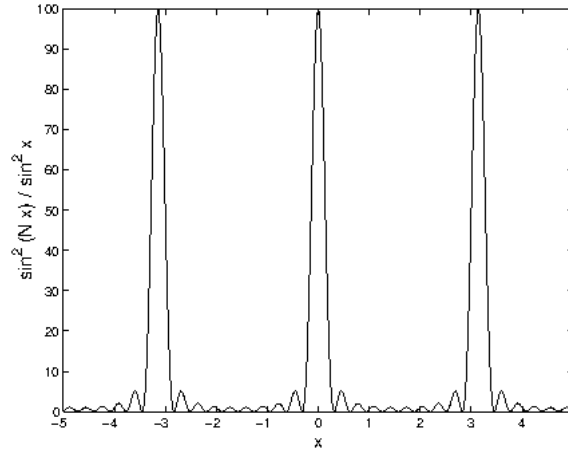
alakban célszerű megadni. Látható, hogy a számláló minden $\epsilon = l/N$ értéknél eltűnik ahol l tetszőleges egész szám. Ugyanakkor ha l N egész számú többszöröse, azaz ϵ maga is egész akkor a nevező is eltűnik. Ekkor a kifejezés $0/0$ alakú. Ezért a határértéket L'Hospital-szabállyal kell meghatározni. Könnyen látható, hogy minden ϵ egész szám esetén

$$f(\pi n) = N. \quad (1.28)$$

Tehát ha

$$\epsilon = \frac{a}{\lambda} \sin \alpha = n, \quad \text{akkor} \quad f(\pi n) = N. \quad (1.29)$$

A többi esetben a függvény értékének abszolút értéke sokkal kisebb mint N (lásd az 1.5 ábra). Ez azt jelent tehát, hogy jelentős intenzitás csak az olyan irányokban van ahol



1.5. ábra. Az $f^2(x)$ függvény

teljesül a

$$\frac{a}{\lambda} \sin \alpha = n \quad (1.30)$$

feltétel. Ugyanakkor a mért intenzitások az egyes csúcsokban nem egyformák, mivel a tényleges intenzitás nyilván $I(k_x) \propto |A_{ind}(k_x)|^2 f^2(k_x)$, tehát függ a $T(x)$ egy perióduson belüli alakjától.

Látható, hogy a csúcsok szélesség fordítottan arányos N -el, tehát növelve a megvilágított periódusok számát csökken a vonalak szélessége. Ennek akkor van jelentősége ha a rácsot arra használjuk, hogy nem monokromatikus fény spektrális összetételét határozzuk meg. (Az ilyen eszközt spektroszkópnak hívják, egy másik mérésben találkozunk vele.) Ekkor az eszköz $\Delta\lambda/\lambda$ felbontóképességét a csúcsok szélessége határozza meg.

Érdekes megjegyezni, hogy mi történik akkor ha a rács nem pontosan periodikus, attól kis mértékben eltér. Megmutatható, hogy ez minden esetben a vonalak kiszélesedéséhez vezet, így rontja a felbontóképességet. Ide kapcsolódó fizikatörténeti érdekesség, hogy spektroszkópai vizsgálatokat a 19. század második felében kezdtek intenzíven végezni. Az eredmények nagyban hozzájárultak a kvantummechanika kidolgozásához. Ugyanakkor az igen precíziós mérésekhez nagyon jó „igen szabályos” optikai rácsokra volt szükség. Ez motiválta Jedlik Ányost a híres osztógépének megalkotására.

1.2.7. Fresnel-féle elhajlás

Abban az esetben ha a tárgy nagyobb méretű (mint pl. a félteret takaró lemez) akkor a Fraunhofer elhajlásnál használt 1.5 $\underline{r}$ -ben lineáris közelítésen túl kel lépni. Ezért $|\underline{r} - \underline{r}'|$ -t adjuk meg expliciten a koordináták segítségével

$$|\underline{r} - \underline{r}'| = z \sqrt{1 + \frac{(x - x')^2}{z^2} + \frac{(y - y')^2}{z^2}}. \quad (1.31)$$

Ha a z sokkal nagyobb mint $|x - x'|$ ill. $|y - y'|$ a négyzetgyök 1 körüli sorfejtéséből

$$z \sqrt{1 + \frac{(x - x')^2}{z^2} + \frac{(y - y')^2}{z^2}} \approx z \left[1 + \frac{(x - x')^2}{2z^2} + \frac{(y - y')^2}{2z^2} \right]. \quad (1.32)$$

Ezt behelyettesítve a kiinduló 1.4 egyenletbe a Fresnel-féle közelítés alapképletét kapjuk:

$$A(\underline{k}) = A_0 e^{ikz} e^{ik \frac{(x^2 + y^2)}{2z}} \iint T(x', y') e^{-ik \frac{(x'^2 + y'^2)}{2z}} e^{i \frac{\underline{k}}{z} (x'x + y'y)} dx' dy', \quad (1.33)$$

amely a korábban bevezetett $\underline{k} = \underline{n}k = (\frac{kx}{z}, \frac{ky}{z})$ vektor használatával átírható az

$$A(\underline{k}) = A^* \iint T(x', y') e^{ik \frac{(x'^2 + y'^2)}{2z}} e^{-i \underline{k} \underline{r}'} dx' dy' \quad (1.34)$$

alakban, ahol az integrál előtti egységnyi abszolút értékű tagot beolvasztottuk az A^* együtthatóba. Az eredményből azt látjuk, hogy ellentétben a Fraunhofer közelítéssel, a Fresner közelítésben a szórási amplitúdó nem egyszerűen a $T(x', y')$ Fourier transzformáltja hanem a módosított

$$T^*(x', y') = T(x', y') e^{ik \frac{(x'^2 + y'^2)}{2z}} \quad (1.35)$$

függvényé.

Abban az esetben ha T csak az x -től függ az 1.34-ben az y' szerinti integrálás egyszerűen elvégezhető és az 1.32 kifejezés alapján egy $y' \rightarrow y - y'$ változó cserével látható, hogy az integrálás eredménye nem függ y tól. Ezért adódik, hogy a szórási amplitúdó ilyenkor

$$A(k, x) = A' \int T(x') e^{ik \frac{(x-x')^2}{2z}} dx', \quad (1.36)$$

ahol A' egy konstans.

1.2.8. Fresnel-féle elhajlás egyenes élen

Amennyiben egy félteret világítunk meg 1.36

$$A(k, x) = A' \int_0^\infty e^{ik \frac{(x-x')^2}{2z}} dx' \quad (1.37)$$

alakot ölti. Szokásos bevezetni a $u = (x - x')/d_f$ változót ahol

$$d_f = \sqrt{\frac{\pi z}{k}}. \quad (1.38)$$

Ekkor

$$A(k, x) = A' d_f \int_{\frac{x}{d_f}}^\infty e^{i\frac{\pi}{2}u^2} du = A' d_f \left[\int_{-\frac{x}{d_f}}^\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du + i \int_{-\frac{x}{d_f}}^\infty \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du \right]. \quad (1.39)$$

Az (1.39)-ben szereplő integrálok kiszámításához szokásos bevezetni az ún. Fresnel-integrálok, amelyek alakja:

$$\begin{aligned} C(w) &= \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu^2\right) d\nu \\ S(w) &= \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}\nu^2\right) d\nu. \end{aligned} \quad (1.40)$$

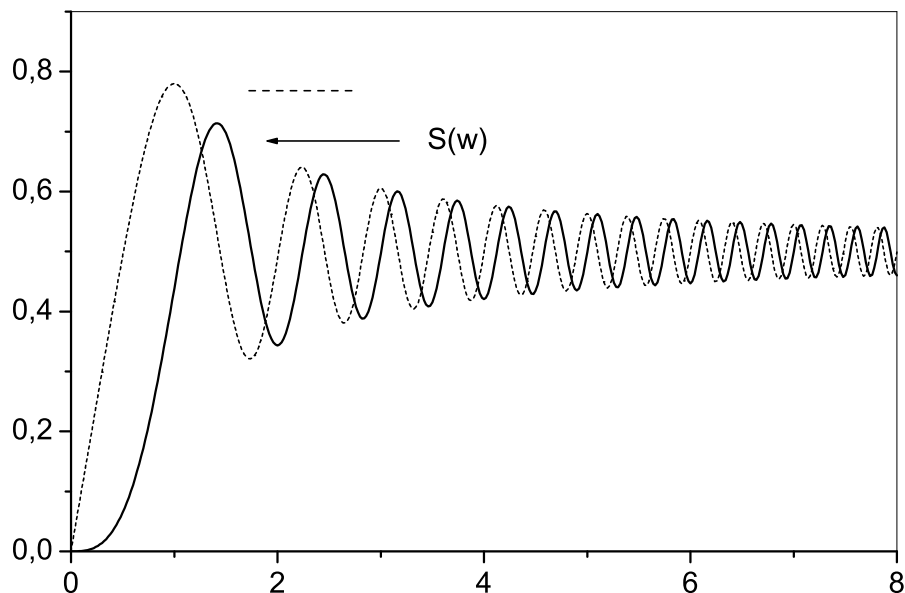
A definícióból azonnal látható, hogy $C(-w) = -C(w)$ és $S(-w) = -S(w)$, azaz a függvények páratlanok.

A Fresnel-integrálokat analitikusan nem lehet kiszámolni, értéküket numerikus integrálással kaphatjuk meg. Alakjukat w függvényében az 1.6. ábra mutatja.

A bevezetett integrálokkal

$$A(k, x) = A' d_f [C(\infty) - C(-x/d_f) + iS(\infty) - iS(-x/d_f)] \quad (1.41)$$

$$= A' d_f [C(\infty) + C(x/d_f) + iS(\infty) + iS(x/d_f)] \quad (1.42)$$



1.6. ábra. A Fresnel-integrálok értéke az w változó függvényében

A bizonyítással itt nem foglalkozunk, de megállapítható, hogy $C(\infty) = S(\infty) = 1/2$. Ezért a mérhető intenzitás a Fresnel-integrálokkal az alábbiak szerint számolható ki

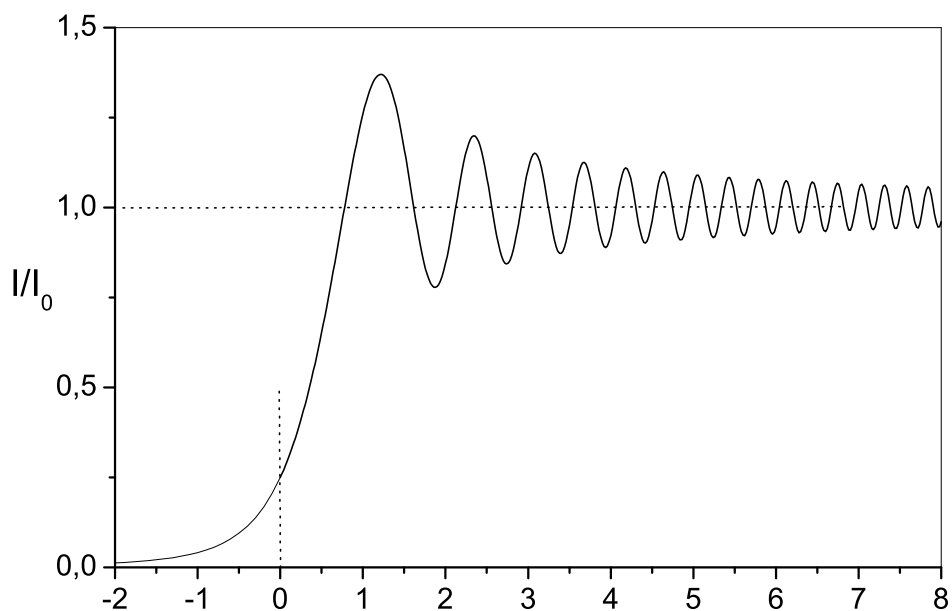
$$I(x) = \frac{I_0}{2} \left[\left(\frac{1}{2} + C(x/d_f) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S(x/d_f) \right)^2 \right], \quad (1.43)$$

ahol I_0 a végtelenben mért intenzitás és

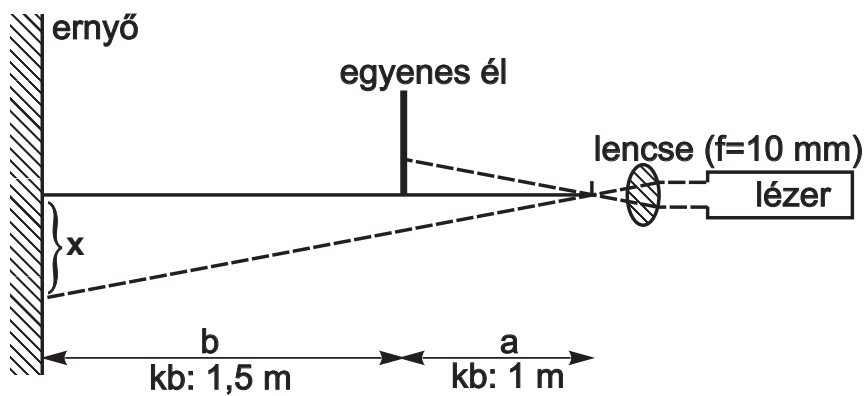
$$d_f = \sqrt{\frac{\pi b}{k}} = \sqrt{\frac{b\lambda}{2}}, \quad (1.44)$$

ahol b a ernyőnek az éltől való távolsága.

A kísérleti elrendezés elvi rajza az 1.8. ábrán látható. A lézer előtt elhelyezett gyűjtőlencse fókuszpontja pontszerű fényforrásként szolgál. A pontszerű fényforrás a távolságra helyezkedik el a féltérlet eltakaró egyenes éltől. Az éltől b távolságra helyezük el a megfigyelő ernyőt, amelyen az egyenes él Fresnel-féle elhajlási képe megjelenik. Az elhajlási kép úgy jelentkezik, hogy az él árnyékának szélén egyre sűrűsödő interferenciacsíkok észlelhetők.



1.7. ábra. Egyenes él elhajlási képe az x/d_f változó függvényeként



1.8. ábra. A Fresnel-elhajlás kísérleti elrendezése

A geometria némileg eltér a fenti számolástól mivel itt az élt a lencse következtében egy gömbhullámmal világítjuk meg. Belátható, hogy az eredmények érdemben nem

változnak, de a korábban megadott d_f helyett a

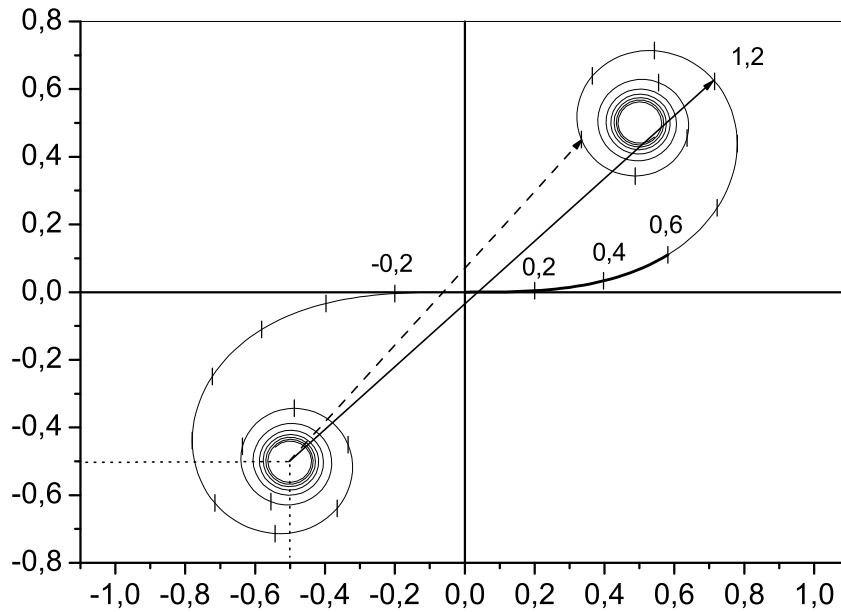
$$d_f = \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{2a}} \quad (1.45)$$

távolságot kell használni.

A 1.7. ábra az I/I_0 numerikus integrálással kapott általános függvényének értékeit a mérőprogram tartalmazza. Tehát a programmal a mért és az elméleti görbe összehasonlítható (részleteket lásd alább).

1.2.9. Cornu-spirális

Egy adott pontban mérhető intenzitás értékére kapott (1.43) kifejezés, $C(w)$ és $S(w)$ táblázatos értékeinek használata helyett, szemléletes ábrázolási módra ad alkalmat. Ábrázoljuk a táblázatos értékek alapján az $S(w)$ értékeket, $C(w)$ függvényében! Az 1.9. ábrán látható az ábrázolás eredménye.



1.9. ábra. A Cornu-spirális ábrája

A kapott függvény neve: *Cornu-spirális*. A Cornu-spirális jól használható a Fresnel-féle elhajlási problémák megoldásában. Ahhoz, hogy az ábrát jól tudjuk használni, azt

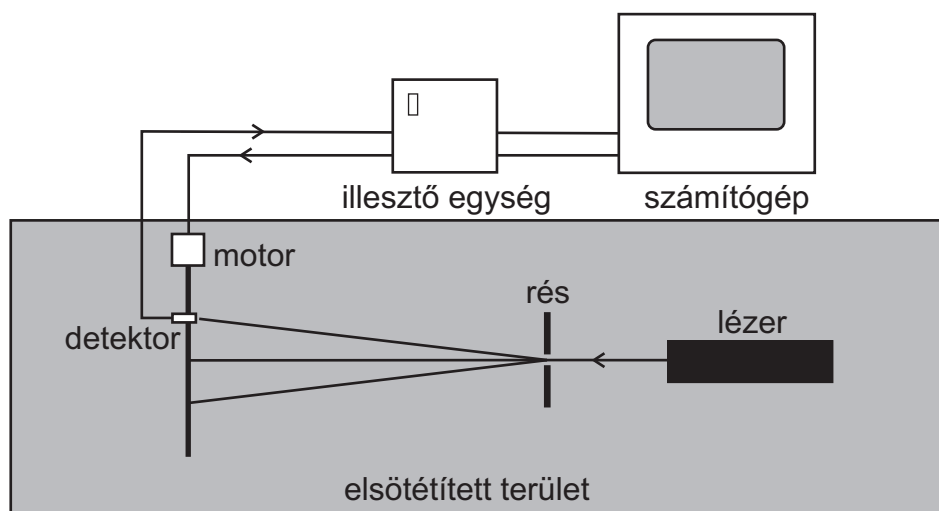
kell tudnunk, hogy a spirális θ -tól mért s ívhossza éppen w értéke. Az alábbi összefüggés alapján ezt könnyű belátni, hiszen

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dC(w))^2 + (dS(w))^2 = \left(\frac{dC(w)}{dw}\right)^2 (dw)^2 + \left(\frac{dS(w)}{dw}\right)^2 (dw)^2 = \\ &= \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2}w^2\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)\right] (dw)^2 = (dw)^2.\end{aligned}$$

Ha tehát a Cornu-spirálist fel akarjuk használni az (1.41) kifejezés szögletes zárójelben lévő értékének kiszámítására, akkor a következőképpen kell eljárunk. El kell dönteni, hogy az ernyőn melyik pontban kívánjuk az intenzitás értékét kiszámítani. Ezután ki kell számítani a pontnak megfelelő $w = x/d_f$. A kapott w értéke meghatároz egy pontot a Cornu-spirális mentén. Ennek a pontnak a $(-0,5, -0,5)$ ponttól mért távolság-négyzete megadja az (1.41) kifejezésben a szögletes zárójel értékét.

1.3. A mérési összeállítás és a mérés módszere

A mérésekhez használt kísérleti elrendezés vázlatos rajza felülnézetben az 1.10. ábrán látható. A monokromatikus fénynyalábot egy *He-Ne* lézer állítja elő, melynek hullám-



1.10. ábra. A mérőberendezés vázlata

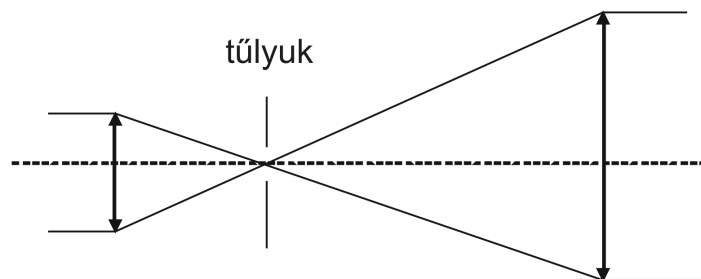
hossza: $\lambda = 632,8 \pm 0,1 \text{ nm}$. A teljesítménye 1 mW , amely a kimenetére helyezett szűrővel $0,2 \text{ mW}$ -ra leosztható. A kialakuló elhajlási kép a tárgytól távol egy ernyőn felfogható, és láthatóvá tehető.

A fény intenzitásváltozását megmérhetjük, ha az ernyő helyett egy fényérzékelő detektor helyezünk el, amelyet vízszintes irányban egy léptetőmotor mozgat. Ezzel a mozgó

detektorral a fény intenzitáseloszlását a hely függvényében megmérhetjük. Az elrendezést egy sötétítő dobozzal letakarjuk, hogy mérés közben ne juthasson zavaró külső fény a detektorba. A számítógép egy illesztő egységen keresztül vezérli a motort, és fogadja a detektor jeleit.

A lézer fényforrás, a rést tartó asztalka és az ernyő egy hosszú optikai padon helyezkednek el. Ez utóbbi kettő ún. lovasokon mozgatható az optikai pad sínje mentén.

A lézer fényforrással végzett optikai kísérletek esetében gyakran előfordul, hogy szükség van, az eredetileg 2 – 3 mm átmérőjű nyaláb helyett, nagyobb átmérőjű párhuzamos nyalábra. Esetünkben például ilyen kísérlet a kettős rés elhajlásának vizsgálta. A lézerfény útjába helyezhető optikai rendszer, a *nyalábtágító*, a nyaláb eredeti félértékszélességét 5 – 10-szeresére növelheti. A laborban az 1.11. ábrán látható ún. Kepler-típusú nyalábtágítót használjuk, amely két domború lencséből áll.



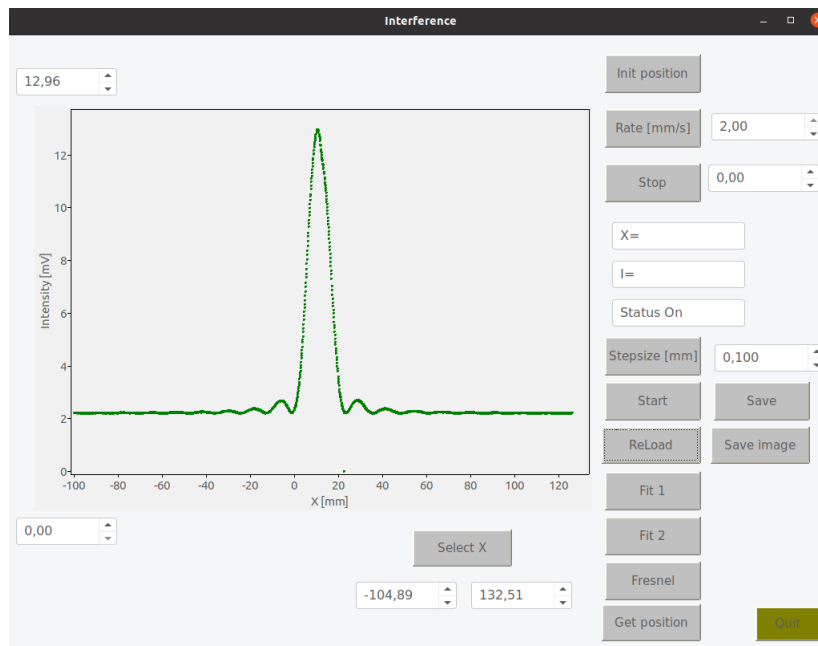
1.11. ábra. A nyalábtágító elvi rajza

A bemenő és a kimenő nyaláb átmérőjének arányát a lencsék fókusz távolságainak aránya határozza meg. Az optikai elem finom csavarmenetével a lencsék helyzete kismértékben változtatható, így a kilépő nyaláb kellően párhuzamossá tehető.

A fókuszpontban elhelyezett tűlyuk a nyaláb homogenitásának javítását szolgálja. Az optikai felületek tökéletlenségei ugyanis nem kívánt elhajlási képeket hoznak létre, amelyek mint a nyaláb *nagyfrekvenciás* tagjai a fókusz síkban, a középponttól távolabb helyezkednek el. A tűlyuk azonban térbeli szűrőként működik, rajta csak a középpont közelében, *kis frekvenciás* tagok jutnak át, homogén kilépő nyalábot eredményezve.

1.3.1. A mérőprogramról

A mérőprogram az „Interfrence” utasítással indítható el akár egy terminálból akár az asztalon levő ikonnal. Ezután első lépésként ki kell választani azt a könyvtárat ahova a mérési eredményeket elmentjük. Ha még nincs az ön neve alatt létrehozott könyvtár az Ön Neptun kódjával hozza létre és válassza ki azt „munkakönyvtárként”. Ezután az 1.12 ábrán látható kép jelenik meg.



1.12. ábra. A mérőprogram

Első lépésként az „Init position” gomb benyomásával a detektort hozza a mérési tartomány közepére. Indítás után a gomb pirosra vált. Amikor kész (1-2 perc) a gomb ismét szürkére vált.

A detektort a „Move” gomb segítségével a mellette levő boxba beírt pozícióba tudja mozgatni. A tényleges mozgatus a boxban az „Enter” leütésével ill. az eger gombjának felengedésével (ha az egeret használta a szám megadására) indul el. A pozíció $\pm 100\text{mm}$ között változtatható.

A mozgatus sebességét hasonló módon a „Rate” beállításával tudja megadni. A maximális sebesség 2mm/s .

A mérés a „Start,” gombbal indítható. Ekkor az aktuális pozícióból a „Move,”-ban megadott értékig mér a program a megadott mozgatusi sebességgel és a „Stepsize,”-ban megadott lépésközzel. Amikor a mérés elkészül a „Save,” gombbal tudja elmenteni a mérést. Egy korábbi mérés visszaolvasható a „ReLoad,” gombbal.

A mérési görbén a skálák a tengelyek melletti boxokba beírt értékekkel beállíthatók, ill. az „x,” tengely a „Select x,” segítségével a megjelenő függőleges vonalak mozgatusával kiválasztható. A vonal mozgatusához a egeret vigye a vonalra. Ezután a „bal,” eger-gombot lenyomva a vonal mozgatható.

Az „Image,” gomb lehetővé teszi, hogy az aktuális ábrán látható görbét „jpg,” formátumban elmentsük. A file neve az aktuális dátumból és időpontból tevődik össze.

A „Get position,” gomb lehetővé teszi a megjelenő függőleges vonal mozgatusával a

mért görbén a "x,, pozíció leolvasását.

A "Fit „ és "Fit 2,, gombokkal az 1 ill. 2 réses elhajlási görbék illeszthetők a kapott mérési görbére. Ehhez először a megjelenő 2 függőleges vonal segítségével ki kell választani az illesztési intervallumot. Ezt úgy tesszük meg, hogy ott már a mért jel besimuljon a háttérbe. Ha kész ismét nyomjuk be a gombot. Ezután ki kell választani a görbe maximumához tartozó pozíciót a megjelenő függőleges vonal mozgatásával. Ha kész ismét nyomjuk be a gombot. Ezután ugyanígy válasszuk ki az első minimumhoz tartozó "x,, pozíciót. A kétréses mérésnél még a "burkoló görbe,, (lásd Az (1.18)) minimumához tartozó "x,, értéket is hasonló módon ki kell választani. Ezután megjelenik az illesztett görbe és az illesztési paraméterek.

A "Fresnel,, gomb segítségével a feltér elhajlási görbére felrajzolhatjuk a megfelelően átskálázott és eltolt elméleti görbét. Ehhez először a függőleges vonalat mozgassuk az első maximumra. A gomb megnyomása után ugyanezt tesszük meg a második maximum esetében is. Végül a gomb benyomása után mozgassuk a függőleges vonalat egy olyan helyre ahol a intenzitás már a háttérnek felel meg. Ezután a gomb ismételt benyomásával megjelenik az elméleti intenzitás görbe.

1.3.2. A mérés menete

1. A laborvezető bekapcsolja a lézert, és megadja a méréshez használandó eszközöket.
2. Kapcsoljuk be az illesztő egységet és indítsa el a mérőprogramot. A "Init measure,, segítségével mozgassuk középre a detektort.
3. Tegyük fel az optikai padra a megfigyelő ernyőt (ez egy fehér, kerek tárcsa)! Helyezzük a rést vagy a hajszálat a tárgyasztalra úgy, hogy létrejöjjön az elhajlási kép!
4. Ellenőrizzük, hogy a rés merőleges legyen a fénysugár irányára: a rést tartalmazó alumíniumlemezről a fény egy része visszaszóródik, és ez egy látható diffúz fényfoltot hoz létre a lézerekészülék előlapján. Ha a folt közepén van, akkor a rés merőleges a sugár irányára.
5. A tárgyasztal finomállító csavarjával mozgassuk a rést a fénysugárra merőleges irányban úgy, hogy az ernyőn az elhajlási kép intenzitása maximális legyen!
6. Vegyük le az optikai padról a megfigyelő ernyőt! Hajtsuk le a sötétítő vásznakat, és igazítsuk a széleit a dobozhoz, hogy kívülről ne jusson be zavaró fény!
7. A programban állítsuk be kívánt mérési tartományt, sebességet és lépésközt majd indítsuk el a mérést. Amikor kész mentjük el az adatokat!
8. Mérjük meg mérőszalaggal a rés és a detektor közötti távolságot!

9. Helyezzük a tárgyasztalra a kettős rést, majd a hajszalet tartó keretet és végezzük el ismét a mérést! A kettős rés esetén a jó beállítás feltétele az, hogy a mindkét résre ugyanakkora fényintenzitás essen, mert a másodosztályú minimumoknál csak akkor teljes a kioltás. Ezért nem a maximális intenzitásra kell törekedni, hanem arra, hogy a másodosztályú minimumok minél jobban megfigyelhetők legyenek. A kettős rés esetén javasolt a nyalábtágító használata. Hajszalet esetén a 4. pontban leírt merőlegesség beállításra nincs szükség, mert a hajszalet henger alakú.
10. A Fresnel elhajlás mérése esetén az egyenes élt egy lovason, az ernyőtől 1,5 – 2 m-re helyezzük el. Helyezzük a gyűjtőlencsét a lézer elé! A lencse fókusztávolsága 10 cm, tehát ennek figyelembevételével határozzuk meg az 1.8. ábra szerinti a és b távolságokat! Mozgassuk az élet a sínre merőleges irányba úgy, hogy az árnyékának határvonala a mérési tartomány közepére essen! Ezután mérjük meg az elhajlási kép intenzitás-eloszlását! Az így megmért geometriai árnyék helyének környezetében célszerű nagyobb felbontással (kisebb távolságon) megismételni a mérést. Mentsük el a mérési adatokat!
11. Az optikai rács elhajlási képét a réses kísérletekhez hasonlóan végezzük el!

1.4. Feladatok

1. Mérjük meg a résen elhajlított fény intenzitáseloszlását!
2. A fent leírt eljárás segítségével illesszük a

$$I(x) = I_0 \frac{\sin^2(k_1 x)}{(k_1 x)^2} \quad (1.46)$$

függvényt! Az illesztett paraméterekből határozzuk meg a rés méretét!

3. Mérjük meg az intenzitáseloszlást a kettős résre!
4. A fent leírt eljárás segítségével illesszük a

$$I(x) = I_0 \frac{\sin^2(k_1 x)}{(k_1 x)^2} \cos^2(k_2 x) \quad (1.47)$$

függvényt! Az illesztett paraméterekből határozzuk meg a kettős rés paramétereit!

5. A hajszalet esetén végezzük el az 1–2. feladatokat, számítsuk ki a szálvastagságot. Mivel a hajszalet átmérője nagyobb a résénél a jobb felbontás érdekében célszerű a hajszalet és a detektor távolságát amennyire lehet megnövelni!

6. MÉRJÜK MEG egyenes él elhajlási képét! A „Fresnel” menüpont segítségével rajzoljuk fel rá az elméleti görbét!
7. MÉRJÜK MEG két, egymástól 5 *mm*-re, 2 *mm*-re és 1 *mm*-re lévő egyenes él elhajlási képét. Figyeljük meg, hogy a réstávolság csökkentésével, a Fresnel-féle elhajlási kép hogyan megy át a rés Fraunhofer-féle elhajlási képébe!

A mérésen az utóbbi időben jelentős fejlesztést végeztünk, ezért elképzelhető, hogy rendellenességet tapasztal. Kérjük ezt jelezze a laborvezetőnek, hogy javítani tudjuk.